

תורת הגלים להנדסה רפואית

פרק 3 - מבוא לגלים

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגילים.....1

הרצאות ותרגילים – מבוא לגלים

סוגי גלים ותאור גלים

רקע:

גל - הפרעה שמתקדמת במרחב

גלים רוחביים - גלים שבהם ההפרעה היא בכיוון ניצב להתקדמות הגל (מיתר מים)

גלים אורכיים - גלים שבהם ההפרעה היא בכיוון מקביל להתקדמות הגל (קול)

תווך - החומר שבו מתקדמת ההפרעה

פונקציית הגל - פונקציה שמתארת את ההפרעה כתלות בזמן ובמרחב. פונקציית הגל צריכה להיות פונקציה מהצורה $f(x \pm vt)$, כאשר v היא מהירות הגל.

יש להבחין בין מהירות התקדמות הגל למהירות של החלקיקים בחומר!

אמפליטודה (משרעת) - הערך המרבי של ההפרעה בגל (בדרי"כ מסומנת באות A).

אנרגיה של גל - $E \propto A^2$

משוואת הגלים

רקע:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} : \text{משוואת הגלים במימד אחד}$$

כל פונקציה מהצורה $f(x \pm vt)$ היא פתרון של משוואת הגלים. סכום של שני פתרונות מהווה גם פתרון אם לשני הפתרונות אותה מהירות גל.

שאלות

1) תרגיל - קוסינוס בשלישית

האם הפונקציה $y(x,t) = A \cos^3(ax + bt)$ מהווה פתרון של משוואת הגלים? במידה וקיים תנאי, פרטו את התנאי, מצאו את מהירות הגל ואת כיוון תנועתו.

2) תרגיל - סכום של שתי פונקציות

האם הפונקציה $y(x,t) = f(x - at) + g(x + bt)$ מהווה פתרון למשוואת הגלים? במידה וקיים תנאי, פרטו את התנאי, מצאו את מהירות הגל ואת כיוון תנועתו.

3) האם הפונקציות הבאות הן פתרון של משוואת הגלים?

א. $y(x, t) = 0.005 \sin(20x - 660t) + 0.009e^{(x+33t)}$

ב. $y(x, t) = 0.005 \sin(20x - 660t) + 0.005 \cos(x + 32t)$

4) תרגיל - חקירת פונקציה

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{4}{3x^2 + 1}$.

א. שרטטו איכותית את צורת הפונקציה.

ב. רשמו ביטוי לגל בעל פרופיל זה, אשר נע בכיוון השלילי של ציר ה- x ,

במהירות $v = 4 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, בהנחה שברגע $t = 0$ מתקיים $\psi(x, 0) = f(x)$.

ג. חשבו, ישירות מהביטוי שמצאתם בסעיף הקודם, היכן נמצא

המקסימום של הגל ברגע $t_1 = 4 \text{ sec}$ וברגע $t_2 = 5 \text{ sec}$.

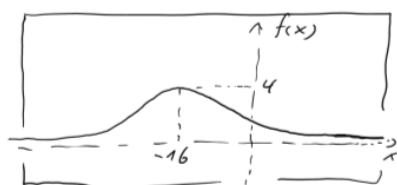
ד. שרטטו איכותית את צורת הגל ברגע $t = 2$.

תשובות סופיות

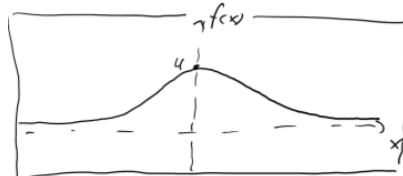
1) $\frac{b}{a}$, בכיוון השלילי של ציר ה- x .

2) $Y(x, t)$ מהווה פתרון רק אם $a = \pm b$ ואז מהירות הגל היא a .
לתנאים ראו בסרטון.

3) א. כן. ב. לא.



ד.



א. (4)

ב. $4(x, t) = \frac{4}{3(x+4t)^2 + 1}$ ג. -16, -20

תכונות ותופעות בגלים

רקע:

התאבכות - סכימה של גלים שנפגשים

חזית גל - אוסף הנקודות המגיעות לשיא באותו זמן

גלים הרמוניים

רקע:

גל מחזורי - גל שמכיל מקטע שחוזר על עצמו

אורך הגל - אורך הקטע שחוזר, מסומן ב- λ (בדור"כ נמדד ע"י המרחק בין שיא לשיא)

זמן המחזור - הזמן שלוקח לגל לעשות מחזור שלם, מסומן ב- T , $\lambda = v \cdot T$

תדירות - מספר המחזורים בשנייה, מסומנת ב- f , $f = \frac{1}{T}$

גל הרמוני - פונקציית קוסינוס או סינוס, $y(x, t) = A \cos(kx \pm \omega t + \varphi)$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

מספר הגל - k , $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\omega = v \cdot k$$

גל עומד

מאפיינים:

1. נקודות צומת- נקודות שלא זזות - node
2. אין מהירות גל
3. נקודת טבור - נקודות שבהן האמפליטודה מקסימאלית - antinode
4. מורכב משני גלים נעים זהים הנעים בכיוונים מנוגדים

משוואת גל עומד היא מהצורה

$$y(x, t) = A \sin(kx) \cos(\omega t + \varphi) = \frac{A}{2} \sin(kx - (\omega t + \varphi)) + \frac{A}{2} \sin(kx + (\omega t + \varphi))$$

שאלות

(1) תרגיל - חישוב ערכים בסיסיים בגל במיתר

במיתר נע גל $y(x, t) = 2 \cos(500t - 0.2x)$.

א. חשבו את האמפליטודה, התדר הזוויתי (ω) , התדר (f) , מספר הגל (k) , אורך הגל (λ) ומהירות הגלים.

ב. באותו מיתר קיים גל $y(x, t) = 2 \sin(500t - 0.2x) + 2 \sin(500t - 0.2x + 0.6)$. על ידי שימוש בזהות של סכום סינוסים, קבלו את הגל השקול. מה מתאר גל זה?

(2) תרגיל - חישוב תדירויות ואורכי גל של גל א"מ

אורך הגל של אור כתום הוא $\lambda = 605 \text{ nm}$.

א. כמה מחזורים של הגל ניתן להכניס לעובי של נייר $(D = 0.08 \text{ mm})$?

ב. איזה מרחק יכסו אותו מספר מחזורים שמצאתם בסעיף א, אם מדובר בגלי מיקרו בעלי תדירות של $f = 10^{10} \text{ Hz}$?

גלי מיקרו נעים במהירות האור, $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

ג. מהי מהירות הקול בגוש ברזל, אם מתפשט בו גל בתדירות $f = 5 \cdot 10^7 \text{ Hz}$, עם אורך גל של $\lambda = 9 \cdot 10^{-5} \text{ m}$?

(3) תרגיל - סכום של N גלים עם הפרשי פאזה ומספרים מורכבים**

נתבונן ב- N גלים מהצורה $A \cos(kx - \omega t)$, כאשר בין גל לגל הפרש פאזה $\Delta\phi$, כלומר הגל ה- n הינו $A \cos(kx - \omega t + n\Delta\phi)$.

א. הראו שסכום הגלים, $\sum_{n=1}^N A \cos(kx - \omega t + n\Delta\phi)$, שקול לגל יחיד עם אותם

ערכי ω ו- k , ומצאו את האמפליטודה והפאזה שלו. היעזרו בכתוב מרוכב.

ב. עבור אילו ערכי $\Delta\phi$ מתקבלת אמפליטודה מקסימלית ומינימלית?

(4) תרגיל - סכום גלים עם הפרשי תדירויות

נתונים N גלים התלויים בזמן כך שקיים הפרש תדירות קבוע בין כל שני גלים $\delta\omega$. כלומר הגל ה- n הוא מהצורה: $A \cos(\omega_0 t + n\delta\omega t)$.

א. השתמשו בתוצאה של התרגיל הקודם ומצאו את סכום הגלים מ- $n = 0$ ועד $n = N - 1$.

ב. הראו שעבור $N = 2$ מתקבלת התוצאה של חיבור שני גלים שראינו בסרטון ההרצאה.

תשובות סופיות

$$(1) \text{ א. } A = 2m, \omega = 500 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}, f = 79.6 \text{ Hz}, k = 0.2 \frac{1}{m}, \lambda = 10\pi m, v = 2500 \frac{m}{s}$$

ב. $-3.3 \sin(0.4x - 1000t)$, גל סינוס עם פאזה של π בתדירות כפולה ואורך גל כפול ואמפליטודה של 3.3.

$$(2) \text{ א. } 130. \text{ ב. } \frac{3}{9} m. \text{ ג. } 4500 \frac{m}{s}$$

$$(3) \text{ א. אמפליטודה } \tilde{A} = A \frac{\sin\left(\frac{N\Delta\phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}; \text{ פאזה } \tilde{\phi} = \frac{N+1}{2} \Delta\phi$$

ב. האמפליטודה המקסימלית היא NA והיא מתקבלת כש- $l = 0, 1, 2$ $\Delta\ell = 2\pi l$.

$$\text{האמפליטודה המינימלית היא אפס והיא מתקבלת עבור } \Delta\phi = \frac{2\pi k}{N}$$

כאשר $\frac{k}{N}$ לא שלם.

$$(4) \text{ א. } A \frac{\sin\left(N \frac{\delta\omega t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta\omega t}{2}\right)} \cos\left(\omega_0 t + \frac{N-1}{2} \delta\omega t\right) \text{ ב. ראו בסרטון.}$$